PRINCIPI DE SIMETRÍA DE SCHWARZ. MÈTODE ALTERNAT. REPRESENTACIÓ CONFORME DE RECINTES LIMITATS PER CURVES ANALÍTIQUES

I. Enunciat i demostració del principi de Simetría

Sigui H_z un recinte simètric respecte de l'eix de les x, essent un segment d'aquest que conté O interior a H_z. Sigui $w=f(z)$ la funció que transforma l'interior de H_z en C_w essent $f(o)=0$ i $f'(o)=a>o$. Establim ara la correspondencia següent: si z i w són dos punts homòlegs en l'anterior, al punt $\bar{z}$ simètric del z respectes de l'eix x, li assignem el punt $\bar{w}$ simètric del w. Aquesta nova correspondencia entre H_z i C_w és evidentment continua, biunívoca i conforme. En ella l'origen es correspòn i la dilatació en ell es com en la primera correspondencia donada. Ara doncs, com que dues representacions conformes no poden existir d'aquesta manera, les dues són idèntiques. Es a dir, si $w=f(z)$ necessariament $\bar{w}=f(\bar{z})$. Aquesta conseqüencia es tradueix del següent modo:

A dos punts simètrics respecte de l'eix x *corresponen en la representació conforme damunt del cercle punts igualment simètrics respecte de l'eix real.* En particular, es corresponen els segments d'aquests eixos que contenen els recintes. Per tant, a la meitat superior de H_z correspòn un dels dos semicercles, i l'altre a la meitat inferior biunívocament i continuament.

D'aquestes consideracions es dedueix que els coeficients del desenrotllament de la funció w en serie de potencies de z són necessariament reals, puix no d'altra manera a valors reals de z correspondrían sempre valors reals de w.

Aquest principi de simetría facilita i simplifica en alguns casos l'aproximació de polinomis de què s'ha fet esment a l'exposar el teorema de Bieberbach. En efecte: si hi ha dos eixos de simetría, v. g., el de les x i el de les y, hi ha centre de simetría, de manera que, en canviar el signo de z ha de canviar el de w; per tant, els coeficients de totes les potencies parells són nuls. Si el nombre d'eixos de de simetría arriba a 4, per a $z = zi$, $w = wi$; els desenrotllaments, doncs, contenen sols potencies de la forma $4n+1$ essent $n = 0, 1, 2 \ldots$; etc.

2. Reflexió respecte d'un segment

Sigui g un recinte en el contorn del qual es presenta el segment rectilini AB (fig. 12), i de tal manera que tot el

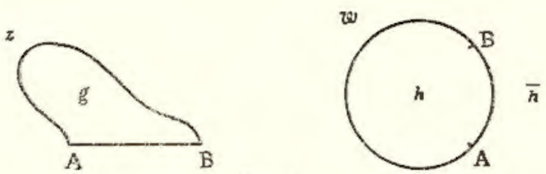

Fig. 12

recinte estigui a un costat de la recta definida per aquest segment. Sigui $w = f(z)$ la funció que transformi l'interior de g en C_w.

Teorema 1.^{er} *La funció f és definida i és regular en el segment* AB *(excloent els extrems) i transforma* AB *en un arc* AB *de* C_w *d'una manera continua i conforme al llarg del segment.*

Teorema 2.^{ón} *Aquesta funció es pot prolongar analíticament a través de dit segment rectilini de manera que* $\overline{g}$ *simètric de* g *respecte d'ell* (suposat en l'eix x) *tingui per transformat* $\overline{h}_w$ *essent aquest exterior a* C_w, *i de tal manera, que a punts simètrics respecte de l'eix* x *en el pla de les* z *corresponen punts simétrics respecte de l'arc* AB (anomenant així els conjugats respecte de C_w).

Per a demostrar uns teoremes tan importants suposem primer que g és un semicercle. La funció que el transforma en C_w és una funció definida en tot el pla de la variable i particularment en el semicercle $\overline{g}$ (V. 2.ª Conf.). La naturalesa d'aquesta transformació es tal, que, aplicada a $\overline{g}$, dóna efectivament per transformat l'espai $\overline{h}$ exterior a C_w i tot parell de punts simètrics l'un en g i l'altre en $\overline{g}$ té per corresponent un parell de punts conjugats en C_w. Es passava, en efecte, del semicercle a C_w, 1.^{er} per la transformació per radis vectors recíprocs $z' = \frac{2}{z}$; el quadrant que s'obté d'aquesta manera és simètric del quadrant que dóna el semicercle simètric del primer. Del quadrant es passa al semiplà per la transformació $z'' = z'^2$ i aquesta transformació conserva la simetría dels semiplans transformats dels quadrants anteriors. Finalment, del semiplà es passa al cercle per una transformació linial que transforma punts conjugats en punts conjugats.

Resulten així demostrats als dos teoremes per al semicercle.

Per a arribar a la demostració general, suposem que $w = f(z)$ és la funció que transforma el recinte g donat i de les condicions esmentades, en C_w. Formi's (fig. 13) el recinte $G = g + \bar{g}$ i sigui $z = \varphi(z')$ la funció que transforma G en C_z de manera que $\varphi(o) = o$ i $\varphi'(o) = a > o$ ($\underline{a}$ real). Aquesta funció φ, en virtut del principi de simetría, transforma g en el semicercle superior g' i $\bar{g}$ en l'inferior $\bar{g}'$. Per conseqüent, la funció $w = f(\varphi(z')) = F(z')$ transforma g' en h,

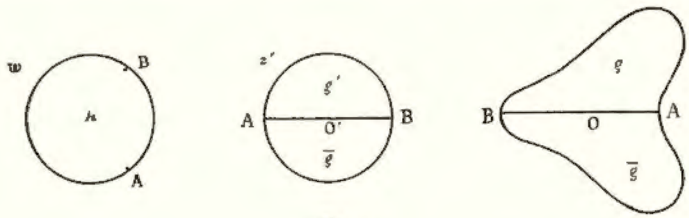

Fig. 13

recinte interior a C_w. Aquesta funció F que representa conforme un semicercle sobre C_w és regular en $\bar{g}'$ el recinte del qual queda transformat en $\bar{h}$, exterior a C_w. Al segment A'B' correspòn conforme l'arc AB. Per altra part, en la funció $z = \varphi(z')$, a $\bar{g}$ correspòn $\bar{g}'$, i a $\bar{g}$ la funció F fa correspondre $\bar{h}$; finalment a punts simètrics en g i $\bar{g}$ corresponen punts simètrics en g' i $\bar{g}'$ i a aquests punts conjugats respecte de AB en el pla de la w com se volía demostrar.

En els extrems A i B del segment, la representació no serà en general conforme.

3. Reflexió respecte d'una curva analítica

En una curva analítica, a valors reals d'un paràmetre t corresponen valors reals de x i y en les funcions

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \\ y &= \psi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

quan els coeficients són reals. Aquests valors són finits si t és inferior al menor dels radis de convergencia de les series anteriors. Suposem la curva analítica definida com com s'acaba de dir i admetem que, per a una certa regió de l'eix real en el pla t, es té,

$$\varphi'(t) \neq o, \qquad \psi'(t) \neq o; \qquad (\beta)$$

però com que la curva la definim en el pla de la variable $z = x + i\, y$, en lloc de (α) podem escriure:

$$z = (a_o + ib_o) + (a_1 + ib_1)t + (a_2 + ib_2)t^2 + \;..\; (a_o + ib_o \neq o)$$

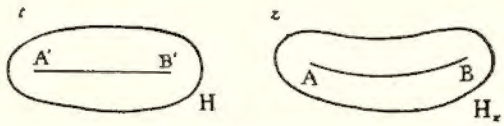

Fig. 14

Si per a tots els punts del segment rectilini AB de l'eix x la curva és perfectament definida i en ells $\frac{dz}{dt} \neq$o, segons (β), sempre podrem imaginar un recinte al voltant de A′B′ en què $\frac{dz}{dt} \neq$o. En el pla z els seus corresponents ompliràn una àrea d'una fulla que contindrà la curva analítica AB corresponent al segment A′B′ fig. 14. Aquests recintes seràn anomenats H_z i H_t. S'anomenen *simètrics respecte de la curva* AB dos punts transformats d'altres dos simètrics respecte de A′B′ i continguts en H_t.

S'anomena *arc lliure* AB de curva analítica, tot arc al qual pot associar-se un altre tan pròxim d'aquell com se vulgui de manera que l'àrea compresa entre ells pertany a H_z. Donat un recinte $G_z \prec H_z$ i del qual l'arc AB forma part del contorn, el seu transformat $G_t \prec H_t$ i té A′B′ en son contorn. Si G_t es representa conforme en C_w, la funció que transforma G_z en G_w és regular i transforma AB en un arc de cercle AB en el plà w; els punts simètrics respecte de l'arc de curva analítica seràn evidentment punts conjugats respecte de AB en el plà w.

Suposem per un moment que la curva AB fos un arc de cercle. La funció $z=\varphi(t)$ és aleshores linial i H_t i H_z s'allarguen fins a incloure tot el pla respectiu. Per tant

En la representació conforme de l'interior d'un recinte damunt l'interior d'un cercle si aquell hi té un arc lliure circular la funció que efectúa la transformació és analítica i regular, transformant-se per ella aquell arc en un arc de circumferencia d'una manera continua i uniforme en tots els seus punts, fòra dels extrems.

Passem ara al cas general. Sigui H_z un recinte qualsevol, i $z=\varphi(t)$ la funció que rectifica l'arc AB de curva analítica (fig. 15). Prenem damunt A'B' en el pla de la variable t un petit segment de cercle. La transformada

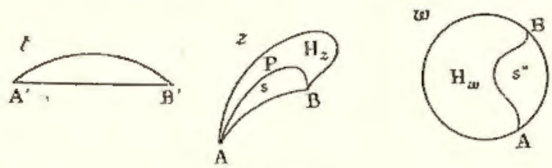

Fig. 15

d'aquesta àrea en el pla z serà una àrea tal com APB suposant sempre que l'arc AB de la curva donada és lliure.

Si $w=f(t)$ és la funció que transforma H_z en l'interior de C_w, a l'àrea APB correspondrà una àrea s'' interior a C_w. Anomenem s' l'àrea del segment en el pla de les t, s l'àrea correspont en z. Les dues àrees s' i s'' es corresponen conformement com en el cas anterior. La funció que dona la correspondencia és regular, continua i conforme en el segment A'B'. Per tant, la representació de H_z sobre H_w és continua i conforme en AB al qual arc fa correspondre l'arc de circumferencia AB en el pla w. Es pot enunciar, per tant, el teorema següent:

La representació conforme damunt del cercle d'un recinte el contorn del qual són arcs lliures de curves analítiques és regular i conforme en dits arcs (fòra dels extrems), *i a tals arcs corresponen arcs de la circumferencia que limita el cercle.*

4. Mètode alternat de Schwarz

Té per objecte obtenir la representació conforme d'un recinte que resulta de la superposició d'altres dos tals com $\alpha\gamma$ i $\beta\delta$ que tenen comú la part $\beta\gamma$ (fig. 16). Se suposa també que l'angle dels contorns allí on es tallen, no és zero. Vejam com, sabent realisar la representació conforme

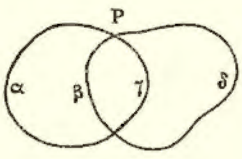

Fig. 16

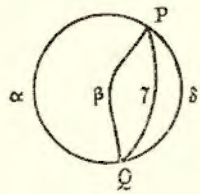

Fig. 17

de cada un dels recintes sobre C_w es pot obtenir la del recinte ocupat per tots dos. En aquesta representació, les linies interiors β i γ seràn interiors a C_w com indica la figura 17. Resulta més avinent raonar sobre semiplans en lloc de cercles. La figura resultant serà doncs com la 18. Les representacions donades correspondràn a les figures 19 i 20 per exemple. Prenem aquestes darreres i anem a passar mitjançant certes transformacions a la 18.

Tracem en la figura 20 una recta ε' que formi amb β' un angle $\varphi = \frac{\pi}{2^n}$ el qual pot ésser tan petit com se vulgui si n és gran a bastament. A la recta ε' correspon-

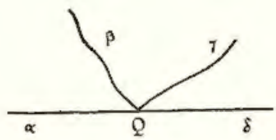

Fig. 18

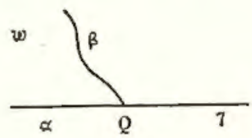

Fig. 19

drà en el pla w de la fig. 19 una certa curva ε fig. 21. Si n és suficient, ε' caurà dins de la porció de pla compresa entre β' i γ'. Per lo tant, ε estarà sencera en el troç de pla comprès entre β i γ, per la correspondencia

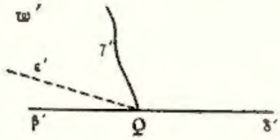

Fig. 20

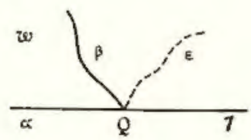

Fig. 21

conforme entre aquestes regions transformades ambdúes conformes de l'espai $\beta\gamma$ comú als recintes donats en el pla z. Transformem ara conformement l'espai entre α i ε en un semiplà i tracem el simètric $\overline{\beta}$ (fig. 22) de β respecte de ε. Sigui w_1 la nova funció. El recinte entre β i ε en el pla w_1 té per corresponent en el pla w' de la figura 20 el recinte entre β' i ε'. Al comprès entre ε i $\overline{\beta}$ correspondrà en w' un recinte simètric respecte de ε' del recinte que comprenen β' i ε'. Representant sobre el semiplà el recinte entre α i $\overline{\beta}$, prenent el simètric de ε sobre el límit del semiplà i el seu corresponent en el pla w' que serà simètric respecte de la transformada de $\overline{\beta}$ i així successivament s'arribarà a omplir tot el semiplà w'. Sigui w_n el pla que dóna aquesta transformació (fig. 23); transformant el

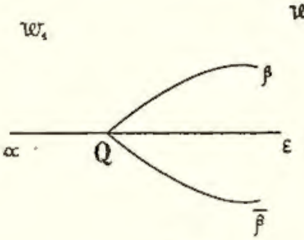

Fig. 22

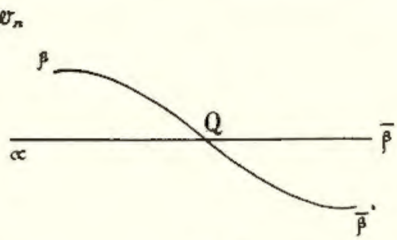

Fig. 23

recinte $\alpha\overline{\beta}'$ en semiplà, s'obté la figura desitjada, puix el recinte entre la transformada de β i la part de l'eix oposada a α té per corresponent en el pla w' el recinte comprès entre β' i δ'.

Aquest mètode importantíssim permet la representació conforme d'un recinte qualsevol limitat per curves analítiques, encara que sigui de diverses fulles, puix cal només cobrir-lo per recintes dels quals se sàpiga fer la representació conforme a guisa de teules en una coberta. Així, per exemple, sigui un recinte limitat per tres arcs lliures de curva analítica. Començarem per definir en els contorns arcs corresponents a segments de cercle en els plans de les rectificants t. Després podrem acudir a sectors i cercles d'una o de diverses fulles per a tapar el recinte donat. Que el nombre de recintes elementals utilisats pot pendre's finit, resulta del teorema de Borel (Vegis son enunciat i demostració en la nota segona amb que acaba la conferencia 5.ª).